14/06/16

Teorema

$f \in C(I) \quad \mathcal{L}y = f \quad (E)$

$\mathcal{L} = \sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} \qquad a_j \in \mathbb{R}$

$f = p(t) e^{ct} \qquad c \in \mathbb{C}$

$p(t)$ = polinomio Reale di grado $d \geq 0$

Definiamo l'intero $\mu = \begin{cases} 0 & \text{se } c \text{ non è radice caratteristica di } \mathcal{A} \\ \text{molteplicità di } c & \end{cases}$

= molteplicità della soluzione c del polinomio caratteristico associato a $\mathcal{L}_y$ (se c è radice)

Allora una soluzione particolare di E si rappresenta come $t^{\mu} q(t) e^{ct}$

q Polinomio di Grado d (stesso grado del polinomio $p(t)$)

OSS

$f(t) = p(t) e^{ct} = p(t) \underbrace{(\cos(c_2 t) + i \operatorname{sen}(c_2 t)) e^{c_1 t}}_{e^{ic_2 t}}$

con $c = c_1 + i c_2$

$= e^{(c_1 + i c_2) t}$

$y(t) = t^{\mu} q(t) e^{ct}$

Se io ho $\mathcal{L}u = p(t) e^{c_1 t} \cos(c_2 t) = p(t) \operatorname{Re}(e^{ct})$

La soluzione di $\mathcal{L}u$ sarà:

$u(t) = \operatorname{Re}(t^{\mu} q(t) e^{ct})$.

Se $\mathcal{L}u$ è Reale prenderò solo la parte Reale della soluzione
Se invece è complesso prendo tutto la soluzione
Se ovvero la parte immaginaria prenderò solo la parte Immaginaria della soluzione

$\mathcal{L}_y = P(t) e^{ct}$

$y(t) = t^{\mu} q(t) e^{ct}$

$Re(\mathcal{L}_y) = Re(P(t) e^{ct})$

$\mathcal{L}\, Re(y) = P(t)\, Re(e^{ct})$

$y^{(4)} - y^{(2)} = \cos^2 t$ (*)

Determinare ~~lo~~ integrale gener
stabilire soluzioni
Risolvere il problema

$y(0) = 1$

$y'(0) = 1$

$y''(0) = 1/3$

$y'''(0) = 0$

$\frac{1 + \cos 2t}{2} = \cos^2 t \Rightarrow$ ho vinto! Formule TRigonometriche

(A) $z^{(4)} - z^{(2)} = 1/2$

$w^{(4)} - w^{(2)} = \frac{\cos 2t}{2}$ $\Rightarrow y = z + w \Rightarrow$ Risolve (*)

cerco soluzione particolare di $z(t)$

$\frac{1}{2} \equiv P_0 e^{0t}$ $c \Rightarrow$ è radice

$P_\lambda = \lambda^2(\lambda^2 - 1)$ < 0 molt 2, 1, −1

sostituisco in (A)

$t^2 q_0 e^{0t} \Rightarrow z = t^2 q_0 = -\frac{t^2}{4}$

$-2q_0 = 1/2 \quad q_0 = -1/4$

$\frac{1}{2} e^{i2t} \rightarrow q_0 e^{i2t}$ cerco soluzione particolare di $w(t)$

$q_0 \left((2i)^4 e^{2it} - (2i)^2 e^{2it} \right) = \frac{e^{it}}{2}$

$q_0 (16 + 4) = 1/2 \quad q_0 = 1/40$

$w(t) \frac{\cos 2t}{40}$

$y(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{\cos 2t}{40}$ $\Longrightarrow$ Soluzione Particolare

$\mathcal{L}_w = \frac{\cos 2t}{2} \qquad \mathcal{L}_2 = 1/2 \qquad \mathcal{L}(w+2) = \mathcal{L}_w + \mathcal{L}_2$

$= \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}$

$= \mathcal{L}_y$

$y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \cosh t + c_4 \operatorname{senh} t - \frac{t^2}{4} + \frac{\cos 2t}{40}$

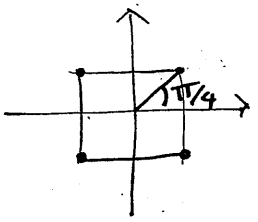
$y^{(4)} + y = e^t + \operatorname{sen} t$

$\begin{cases} y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \\ y''(\pi) = 0 \\ y'''(\pi) = 0 \end{cases}$

$\lambda^4 + 1 = 0$ ho 4 Radici

$\lambda_k = e^{\left(i\pi/4 + i k \frac{2\pi}{4}\right)}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i \frac{1}{\sqrt{2}}$ o $-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i \frac{1}{\sqrt{2}}$



master copy COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

$\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow e^{t/\sqrt{2}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\ e^{t/\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$

$-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow e^{-t/\sqrt{2}}\cos\left(+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\ e^{-t/\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$

$w^4 + w = e^t \longrightarrow w = e^t/2$

$z^4 + z = \operatorname{sen} t \longrightarrow z = \frac{\operatorname{sen} t}{4}$

$y(t) = w + z$

$= \frac{e^t + \operatorname{sen} t}{2}$ Soluzione particolare

Generale

$y'' + y' = t^2$

2 modi — $\begin{cases} v = y' \\ v' = y'' \end{cases}$ $v' + v = t$, $y = y'$ Risolvo ecco!

$P(\lambda) = -\lambda(\lambda+1)$ $\lambda = -1$, $\lambda = 0$

$C=0$ è Radice coincidente

$P(t) = t^2$

~~$t \cdot q(t)(e^{0t} = 1)$~~

$(q_2 t^2 + q_1 t + q_0)$

$(tq)'' + (tq) = t^2$

$2q' + tq'' + q + tq' - t^2 = 0$

$q'' = 2q_2$

$q' = q_1 + 2q_2 t$

$$\begin{aligned} 2q_1 + q_0 &= 0 \\ 6q_2 + 2q_1 &= 0 \\ 3q_2 - 1 &= 0 \end{aligned} \Longrightarrow \text{Fine} \quad \begin{aligned} q_1 &= -1 \\ q_2 &= 1/3 \end{aligned}$$

$C_1 + C_2 e^{-t} + tq(t)$ soluzione Gene.

Basta che $C_2 \neq 0$ e ho vinto. Vo a $-\infty$
Deve se $C_2 = 0$ devo vedere come si comporta il Polinomio

master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745